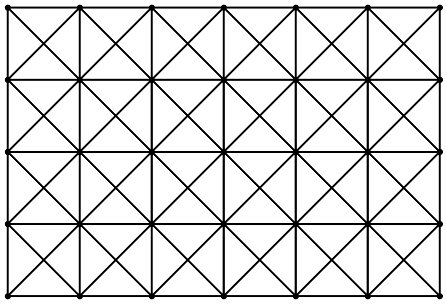
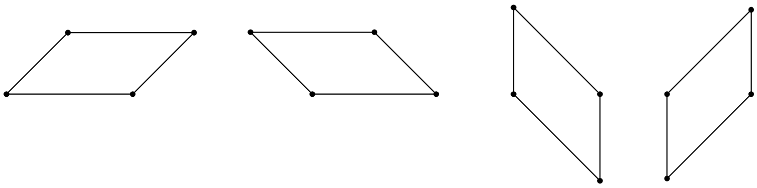
SOAL 1. Diketahui bangun persegi panjang berukuran 4×6 dengan beberapa ruas garis, seperti pada gambar.



Dengan menggunakan ruas garis yang sudah ada, tentukan banyak jajar genjang tanpa sudut siku-siku pada gambar tersebut.

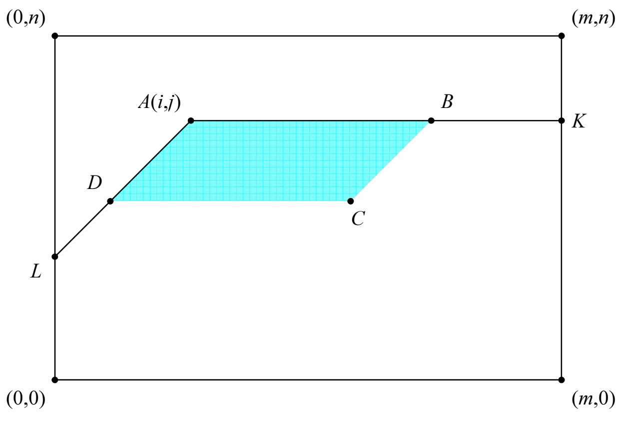
SOLUSI 1. Ada empat tipe jajar genjang yang harus dihitung, yakni sebagai berikut



Kita hitung banyak jajar genjang tipe pertama saja. Tipe kedua tentu saja sama banyak dengan tipe pertama (dengan meninjau refleksi 'kiri kanan'). Tipe ketiga dan keempat sama banyak juga (tetapi secara umum tidak sama banyak dengan tipe pertama), nanti kita tinjau. Untuk jajar genjang tipe pertama, titik sudut di kiri atas kita namakan *titik sudut utama.*

Kita selesaikan kasus yang lebih umum, tinjau grid berukuran $m \times n$. Kita identifikasi titik-titik latis pada grid tersebut dengan pasangan bilangan bulat tak negatif (i, j) dengan $0 \leq i \leq m$ dan $0 \leq j \leq n$. Titik di ujung kiri bawah adalah titik $(0, 0)$, kanan bawah $(m, 0)$, kiri atas $(0, n)$ dan kanan atas (m, n).

Sekarang tinjau jajar genjang tipe pertama di dalam grid dengan titik sudut utama $A\,(i, j)$. Jajargenjang-jajargenjang semacam ini ditentukan secara tunggal oleh pasangan titik (B, D) dengan B di segmen AK dan D di segmen AL, dengan $B \neq A$ dan $D \neq A$. Banyak titik latis di segmen AK selain A adalah $m - i$ dan banyak titik latis di segmen AL selain A adalah $\min\{i, j\}$.



Jadi, banyak jajar genjang tipe pertama dengan titik sudut utama (i, j) adalah $(m-i)\min\{i, j\}$. Banyak jajar genjang tipe pertama secara keseluruhan adalah

$$\begin{aligned}
& \#\{\text{jajar genjang tipe pertama}\} \\
= & \sum_{A \in \text{grid}} \#\{\text{jajar genjang tipe pertama dengan titik utama } A\} \\
= & \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(m-i)\min\{i, j\}.
\end{aligned}$$

Dengan menghitung manual, untuk $m = 6$ dan $n = 4$ diperoleh banyak jajar genjang tipe pertama (sama dengan banyak jajar genjang tipe kedua) adalah 105.

Banyak jajar genjang tipe ketiga (yang sama banyak dengan jajar genjang tipe keempat sama banyak dengan jajar genjang tipe pertama di dalam *grid baru* yang dihasillkan dengan mengaplikasikan rotasi sebesar 90° (berlawanan arah dengan jarum jam) pada grid asal. Dengan demikian, kita tinggal menukar peran m dan n pada sigma sebelumnya, yakni

$$\#\{\text{jajar genjang tipe ketiga}\} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(n-i)\min\{i, j\}.$$

Untuk $m = 6$ dan $n = 4$, diperoleh bahwa nilai sigma di atas adalah 55.

Jadi, banyak jajar genjang keseluruhan (tipe pertama sampai dengan tipe keempat) adalah $2 \times (105 + 55) = 320$.

KOMENTAR. Kita mempunyai sifat sigma berikut,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(n-i)\min\{i, j\} &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\min\{i, j\} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(n-j)\min\{j, i\} \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(n-j)\min\{i, j\}.
\end{aligned}$$

Jadi,

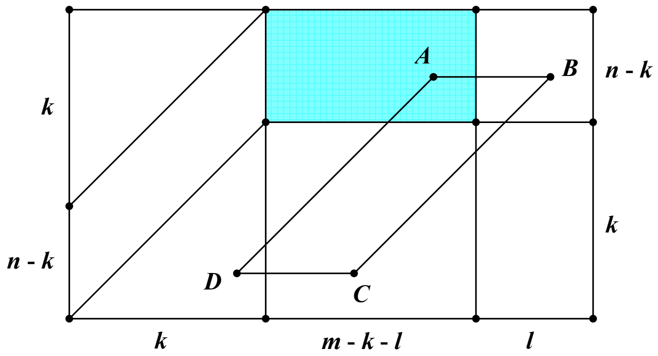
$$\#\{\text{jajar genjang tipe I - IV}\} = 2\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(m+n-i-j)\min\{i, j\}.$$

Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(m+n-i-j)\min\{i, j\} \\
= & \binom{\min\{m,n\}+1}{3} + \binom{\min\{m,n\}+1}{2}\binom{\max\{m,n\}}{2}.
\end{aligned}$$

SOLUSI 2. Seperti solusi pertama, kita tinjau kasus umum, yakni kita hitung banyak jajar genjang pada grid berukuran $m \times n$ (grid persegi panjang dengan panjang alas m dan tinggi n). Kita klasifikasikan empat tipe jajar genjang yang harus dihitung dan untuk jajar genjang tipe pertama, kita definisikan titik sudut utama seperti pada SOLUSI 1.

Di solusi ini, kita hitung jajar genjang tipe pertama dengan tinggi k dan panjang alas l. Perhatikan bahwa $1 \le k \le \min\{m, n\}$, $1 \le l$ dan juga $k + l \le m$. Selain itu, titik sudut utama dari jajar genjang tipe pertama semacam ini terletak pada daerah yang diarsir pada gambar berikut (jika titik sudut utama di luar daerah yang diarsir, maka ada satu titik sudut lain yang terletak di luar grid).



Banyak titik latis pada daerah yang diarsir di atas adalah $(m-k-l+1)(n-k+1)$. Ini juga menyatakan banyak jajar genjang tipe pertama dengan tinggi k dan panjang alas l. Karena $1 \le k \le \min\{m, n\}$ dan $1 \le l \le m - k$, banyak jajar genjang tipe pertama (yang sama banyak dengan tipe kedua) sama dengan

$$\begin{aligned}
&\#\{\text{jajar genjang tipe pertama}\} \\
= &\sum_{k,l \text{ yang mungkin}} \#\{\text{jajar genjang tipe pertama dengan tinggi } k \text{ dan alas } l\} \\
= &\sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \sum_{l=1}^{m-k} (m-k-l+1)(n-k+1).
\end{aligned}$$

Untuk $m = 6$ dan $n = 4$, sigma ini dapat dihitung secara manual dan sama dengan 105. Banyak jajar genjang tipe ketiga (yang sama banyak dengan tipe keempat) diperoleh dengan menukar m dan n dalam sigma di atas, yakni

$$\#\{\text{jajar genjang tipe ketiga}\} = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \sum_{l=1}^{n-k} (n-k-l+1)(m-k+1).$$

Untuk $m = 6$ dan $n = 4$, sigma ini adalah 55.

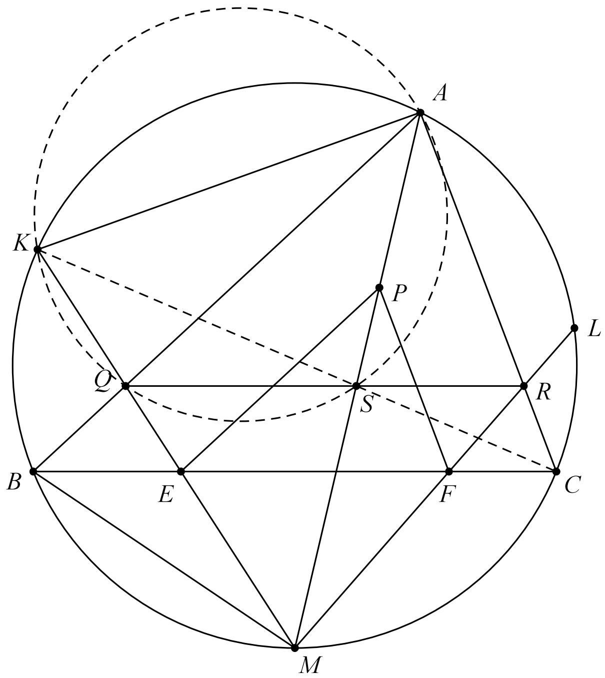
Jadi, banyak jajar genjang keseluruhan adalah $2 \times (105 + 55) = 320$.

KOMENTAR. Dapat dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \sum_{l=1}^{m-k} (m-k-l+1)(n-k+1) + \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \sum_{l=1}^{n-k} (n-k-l+1)(m-k+1) \\
= &\binom{\min\{m,n\}+1}{3} + \binom{\min\{m,n\}+1}{2}\binom{\max\{m,n\}}{2}.
\end{aligned}$$

SOAL 2. Diberikan segitiga lancip ABC dengan lingkaran luar ω. Garis bagi $\angle BAC$ memotong ω di titik M. Misalkan P suatu titik pada garis AM dengan P di dalam segitiga ABC. Garis melalui P yang sejajar AB dan garis melalui P yang sejajar AC memotong sisi BC berturut-turut di titik E dan F. Garis ME dan MF memotong ω lagi berturut-turut di titik K dan L. Buktikan bahwa garis-garis AM, BL dan CK konkuren.

SOLUSI. Misalkan garis MK memotong sisi AB di titik Q dan garis ML memotong sisi CA di titik R dan satu lagi, garis QR memotong garis bagi AD di titik S.



Karena $PE \,||\, AB$ dan $PF \,||\, AC$, maka $ME/MQ = MP/MA = MF/MR$. Jadi, $QR \,||\, EF$ yang berakibat $\angle ARS = \angle ACB$, sehingga

$$\begin{aligned}\angle ASR &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC - \angle ACB = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle ABC \\ &= \angle CAM + \angle ABC = \angle CBM + \angle ABC = \angle ABM.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $ASQK$ juga segiempat talibusur. Ini berakibat, $\angle AKS = \angle AQS = \angle ABC$ (karena $QS \,||\, BC$). Padahal kita juga mempunyai $\angle AKC = \angle ABC$. Jadi, C, S, K kolinear. Dengan cara yang sama, B, S, L juga kolinear. Kita simpulkan bahwa AD, BL dan CK bertemu di titik S dan kita selesai.

SOAL 3. Tentukan semua bilangan real positif M sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif a, b, c, paling sedikit satu diantara tiga bilangan berikut

$$a+\frac{M}{ab}, \quad b+\frac{M}{bc}, \quad c+\frac{M}{ca}$$

bernilai lebih dari atau sama dengan $1+M$.

SOLUSI 1. Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan real positif x, y berlaku

$$x+y+\frac{1}{xy} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot y \cdot \frac{1}{xy}} = 3$$

berdasarkan ketaksamaan AM-GM. Dengan demikian, untuk sebarang bilangan real positif a, b, c berlaku

$$\begin{aligned} & \left(a+\frac{1}{2ab}\right)+\left(b+\frac{1}{2bc}\right)+\left(c+\frac{1}{2ca}\right) \\ = \; & \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{ab}+b+c+\frac{1}{bc}+c+a+\frac{1}{ca}\right) \geq \frac{1}{2}(3+3+3). \end{aligned}$$

Akibatnya, bilangan terbesar diantara tiga bilangan

$$a+\frac{1}{2ab}, \quad b+\frac{1}{2bc}, \quad c+\frac{1}{2ca}$$

pasti lebih dari $3/2 = 1+1/2$. Dengan demikian, $M = 1/2$ memenuhi syarat.

Kita buktikan bahwa tidak ada bilangan real positif lain yang memenuhi. Misalkan $M > 0$ memenuhi syarat pada soal. Dengan mengambil $a = b = c = \sqrt[3]{2M}$ diperoleh

$$a+\frac{M}{ab} = b+\frac{M}{bc} = c+\frac{M}{ca} = \sqrt[3]{2M}+\frac{M}{\sqrt[3]{2M}\cdot\sqrt[3]{2M}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2M}.$$

Dengan demikian, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2M} \geq 1+M$. Padahal dengan ketaksamaan AM-GM dipunyai

$$1+M = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+M \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot M} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2M}.$$

Jadi, kesamaan harus terjadi pada ketaksamaan AM-GM d atas, sehingga $M = 1/2$ dan kita selesai.

SOLUSI 2. Kita buktikan bahwa $M = 1/2$ adalah syarat perlu agar kondisi pada soal terpenuhi. Misalkan M memenuhi kondisi pada soal. Dengan mengambil $a = b = c = t > 0$, diperoleh $t + M/t^2 \geq 1+M$ untuk setiap $t > 0$. Perhatikan bahwa

$$t+\frac{M}{t^2}-(1+M) = \frac{1}{t^2}(t-1)\left(t^2-Mt-M\right).$$

Tinjau fungsi kuadrat $f(t) = t^2 - Mt - M$. Diskriminannya $D = M^2 + 4M$ positif, sehingga f memiliki dua akar real yang hasil kalinya $-M < 0$. Jadi, ada satu akar positif $r > 0$ dan satu negatif $s < 0$. Kita selanjutnya mempunyai faktorisasi

$$t+\frac{M}{t^2}-(1+M) = \frac{1}{t^2}(t-1)f(t) = \frac{1}{t^2}(t-1)(t-r)(t-s).$$

Karena $(t-s)/t^2 > 0$ untuk setiap $t > 0$, haruslah $(t-1)(t-r) \geq 0$ untuk setiap $t > 0$. Karena $r > 0$, ini hanya terjadi jika dan hanya jika $r = 1$. Selanjutnya, $0 = f(1) = 1 - 2M$, jadi $M = 1/2$.

Untuk $M = 1/2$, ketaksamaan AM-GM juga bisa digunakan dengan cara yang berbeda sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{1}{2ab}\right) + \left(b + \frac{1}{2bc}\right) + \left(c + \frac{1}{2ca}\right) \\ = \; & \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{1}{ab} + b + c + \frac{1}{bc} + c + a + \frac{1}{ca}\right) \\ \geq \; & \frac{9}{2}\sqrt[9]{ab\frac{1}{ab} \cdot bc\frac{1}{bc} \cdot ca\frac{1}{ca}} = \frac{9}{2}, \end{aligned}$$

sehingga bilangan terbesar diantara tiga bilangan

$$a + \frac{1}{2ab}, \quad b + \frac{1}{2bc}, \quad c + \frac{1}{2ca}$$

pasti lebih dari $3/2 = 1 + 1/2$. Dengan demikian, $M = 1/2$ memenuhi syarat.

SOLUSI 3. Ini adalah solusi alternatif bahwa $M = 1/2$ memenuhi syarat. Kita bisa mengasumsikan tanpa mengurangi keumuman bahwa a adalah bilangan terbesar di antara a, b, c karena bentuk ketiga bilangan pada soal bersifat siklis. Dengan demikian,

$$a + \frac{1}{2ab} = \frac{1}{2}\left(a + a + \frac{1}{ab}\right) \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{1}{ab}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \geq \frac{3}{2}.$$

Kita bisa juga misalnya mengasumsikan bahwa a yang terkecil. Dengan asumsi ini, dengan ketaksamaan yang sama, diperoleh bahwa $c + 1/2ca \geq 3/2$.

SOAL 4. Misalkan $p > 3$ bilangan prima dan

$$S = \sum_{2 \le i < j < k \le p-1} ijk.$$

Buktikan bahwa bilangan $S + 1$ habis dibagi p.

SOLUSI. Identitas berikut penting dalam bukti kita.

LEMA. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan real. Identitas berikut berlaku

$$6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - 3\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

BUKTI. Lema di atas adalah akibat langsung dari dua penjabaran berikut

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3 + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j (a_i + a_j) + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^3 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j (a_i + a_j).$$

Bukti lema selesai. $\square$

Sekarang ambil $n = p-2$ dengan $p > 3$ dan $a_i = i+1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, p-2$, kita mempunyai

$$6 \sum_{2 \le i < j < k \le p-1} ijk = \left(\sum_{i=2}^{p-1} i\right)^3 + 2\sum_{i=2}^{p-1} i^3 - 3\left(\sum_{i=2}^{p-1} i^2\right)\left(\sum_{i=2}^{p-1} i\right).$$

Kita gunakan rumus terkenal

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{m} i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} 6 \sum_{2 \le i < j < k \le p-1} ijk &= \left(\frac{(p-1)p}{2} - 1\right)^3 + 2\left(\frac{(p-1)^2p^2}{4} - 1\right) \\ &\quad -3\left(\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} - 1\right)\left(\frac{(p-1)p}{2} - 1\right). \end{aligned}$$

Sekarang kita lakukan reduksi modulo p. Karena $p > 3$ dan p prima, maka p ganjil dan $p \equiv 1$ atau $2 \pmod 3$. Dengan demikian, $(p-1)/2$ dan $(p-1)(2p-1)/6$ selalu bulat. Akibatnya

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(p-1)p}{2} - 1\right)^3 + 2\left(\frac{(p-1)^2p^2}{4} - 1\right) - 3\left(\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} - 1\right)\left(\frac{(p-1)p}{2} - 1\right) \\ \equiv\ & (-1)^3 + 2(-1) - 3(-1)(-1) \pmod p \equiv -6 \pmod p. \end{aligned}$$

Jadi, $6S \equiv -6 \pmod p$. Karena $p > 3$ prima, maka $\gcd(p, 6) = 1$, sehingga $S \equiv -1 \pmod p$, atau dengan kata lain, $S + 1$ habis dibagi p dan kita selesai.

SOAL 5. Diberikan sebarang polinom kuadrat $P(x)$ dengan koefisien utama positif dan diskriminan negatif. Buktikan bahwa $P(x)$ dapat dinyatakan sebagai jumlah tiga polinom kuadrat

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$$

dengan $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ memiliki koefisien utama positif dan diskriminan nol serta akar (real kembar) dari ketiga polinom tersebut berbeda.

Catatan: Koefisien utama dari polinom kuadrat $Q(x)$ adalah koefisien dari x^2.

SOLUSI 1. Tulis $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a > 0$ dan diskriminan $D = b^2 - 4ac$ negatif. Akan dibuktikan bahwa ada tiga bilangan real berbeda r_1, r_2, r_3 yang memenuhi

$$P(x) = \frac{a}{3}(x - r_1)^2 + \frac{a}{3}(x - r_2)^2 + \frac{a}{3}(x - r_3)^2 . \tag{1}$$

Kalau ini terbukti, kita tinggal mengambil $P_i(x) = a(x - r_i)^2 / 3$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Dengan menjabarkan dan menyederhanakan, ruas kanan (1) sama dengan

$$P(x) = ax^2 - 2a\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right)x + a\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}\right)$$

Jadi, agar (1) berlaku, kita cukup menyelesaikan sistem persamaan

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} = -\frac{b}{2a} \quad \text{dan} \quad \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3} = \frac{c}{a}$$

dengan r_1, r_2, r_3 berbeda.

Untuk tujuan tersebut, misalkan $r = -b/2a$, ambil $t = \sqrt{-3D/8a^2} > 0$, lalu ambil $r_1 = r - t$, $r_2 = r$, $r_3 = r + t$. Kita mempunyai $r_1 < r_2 < r_3$, dan

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} = \frac{(r - t) + r + (r + t)}{3} = r = -\frac{b}{2a}$$

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3} &= \frac{(r - t)^2 + r^2 + (r + t)^2}{3} = r^2 + \frac{2}{3}t^2 \\ &= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{-3D}{8a^2}\right) = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

seperti yang diinginkan dan kita selesai.

SOLUSI 2. Tulis $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a > 0$ dan diskriminan $b^2 < 4ac$, sehingga $c > 0$. Sekarang pilih a_1 sebarang bilangan di antara $b^2/4c$ dan a dengan $a_1 \neq b^2/2c$. Sekarang ambil $P_1(x) = (a - a_1)x^2$, diperoleh

$$P(x) = P_1(x) + a_1x^2 + bx + c$$

dengan $Q(x) = a_1x^2 + bx + c$ adalah polinom kuadrat dengan diskriminan negatif dan koefisien utama $a_1 > 0$. Dengan ide yang sama dengan solusi sebelumnya, kita selesaikan persamaan

$$a_1x^2 + bx + c = \frac{a_1}{2}(x - r_1)^2 + \frac{a_1}{2}(x - r_2)^2 = a_1x^2 - a_1(r_1 + r_2)x + a_1\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right)$$

yakni $r_1 + r_2 = -b/a_1$ dan $r_1^2 + r_2^2 = 2c/a_1$. Sistem persamaan tersebut ekivalen dengan

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a_1}, \quad r_1 r_2 = \frac{b^2 - 2ca_1}{2a_1^2}. \tag{2}$$

Karena polinom kuadrat

$$T(x) = x^2 + \frac{b}{a_1}x + \frac{b^2 - 2ca_1}{2a_1^2}$$

memiliki diskriminan

$$\frac{b^2}{a_1^2} - \frac{2b^2 - 4a_1 c}{a_1^2} = -\frac{b^2 - 4a_1 c}{a_1^2} > 0,$$

maka sistem (2) solusi dengan $r_1 \neq r_2$ (yang merupakan akar dari $T(x)$). Dan karena $b^2 - 2ca_1 \neq 0$ (telah kita hindari pada pemilihan a_1), maka r_1, r_2 tak nol (karena $T(0) \neq 0$). Kita selanjutnya mengambil $P_2(x) = a_1(x - r_1)^2/2$ dan $P_3(x) = a_1(x - r_2)^2/2$ dan kita selesai.

SOAL 6. Suatu bilangan asli n dikatakan *kuat* apabila terdapat bilangan asli x sehingga $x^{nx}+1$ habis dibagi 2^n.

(a) Buktikan bahwa 2013 merupakan bilangan kuat.

(b) Jika m bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil y sehingga $y^{my}+1$ habis dibagi 2^m.

SOLUSI. Lema berikut sangat penting dalam bukti kita.

LEMA. Misalkan a, b, k bilangan asli dengan a, b ganjil. Dengan ini, berlaku $2^k \mid a^b+1$ jika dan hanya jika $2^k \mid a+1$.
BUKTI. Perhatikan pemfaktoran berikut

$$a^b+1=(a+1)(a^{b-1}-a^{b-2}+a^{b-3}-\cdots-a+1).$$

Dari sini, trivial bahwa jika $2^k \mid a+1$, maka $2^k \mid a^b+1$.

Sekarang untuk arah sebaliknya misalkan $2^k \mid a^b+1$. Karena a ganjil, maka $a^{b-1}, a^{b-2}, a^{b-3}, \ldots, a, 1$ ganjil dan karena b ganjil, ada sebanyak b bilangan ganjil pada suku kedua pemfaktoran di atas. Dengan demikian, bilangan $a^{b-1}-a^{b-2}+a^{b-3}-\cdots-a+1$ ganjil sehingga relatif prima dengan 2^k. Akibatnya, $2^k \mid a+1$ dan lema terbukti. $\square$

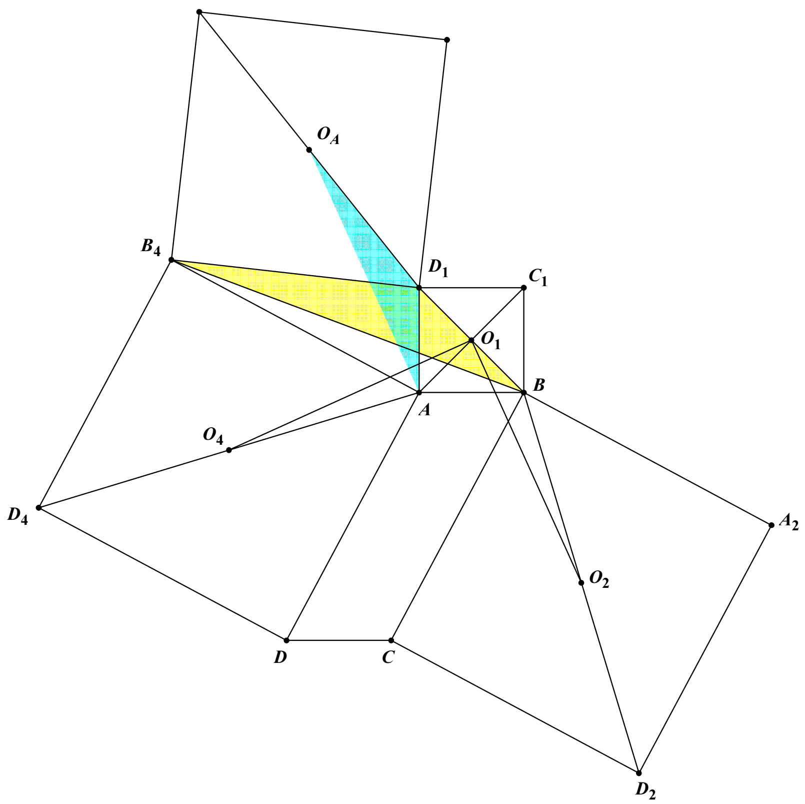
(a) Kita buktikan lebih umum bahwa semua bilangan ganjil senantiasa kuat. Misalkan m bilangan ganjil dan pilih $x=2^m-1$. Dengan demikian, x ganjil sehingga mx juga ganjil. Karena $x+1=2^m$ jelas habis dibagi 2^m, maka $x^{mx}+1$ juga habis dibagi 2^m. Berdasarkan definisi, m adalah bilangan kuat.

(b) Misalkan m bilangan kuat dan y bilangan asli terkecil sehingga $2^m \mid y^{my}+1$. Pertama, $y^{my}+1$ harus genap, sehingga y^m dan y ganjil. Berdasarkan lema (dengan $a=y^m$ dan $b=y$), diperoleh bahwa $2^m \mid y^m+1$. Seandainya m genap, maka $y^m+1 \equiv 2 \pmod 4$ sementara 2^m habis dibagi 4. Dalam hal ini, tidak mungkin berlaku $2^m \mid y^m+1$. Jadi, m harus ganjil dan berdasarkan lema lagi (dengan $a=y$ dan $b=m$), diperoleh $2^m \mid y+1$. Dengan demikian, $y+1 \geq 2^m$ atau $y \geq 2^m-1$. Sebaliknya, seperti bagian (a), $y=2^m-1$ memang memenuhi $2^m \mid y^{my}+1$. Jadi, bilangan y yang kita cari adalah ini dan kita selesai.

SOAL 7. Diberikan jajar genjang $ABCD$. Pada sisi luar jajar genjang, dikonstruksi persegi-persegi ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3 dan DAB_4C_4. Pada sisi-sisi luar B_4D_1, C_1A_2, D_2B_3, dan A_3C_4 dari segitiga-segitiga AB_4D_1, BC_1A_2, CD_2B_3, dan DA_3C_4, konstruksi persegi-persegi lagi dengan pusat berturut-turut O_A, O_B, O_C dan O_D. Buktikan bahwa

$$AO_A = BO_B = CO_C = DO_D.$$

SOLUSI 1. Tanpa kehilangan keumuman, misalkan $ABCD$ terurut searah jarum jam. Kita cukup membuktikan bahwa $AO_A = BO_B$. Nanti analog, $BO_B = CO_C$ dan $CO_C = DO_D$ dan kesimpulan pada soal mengikuti.



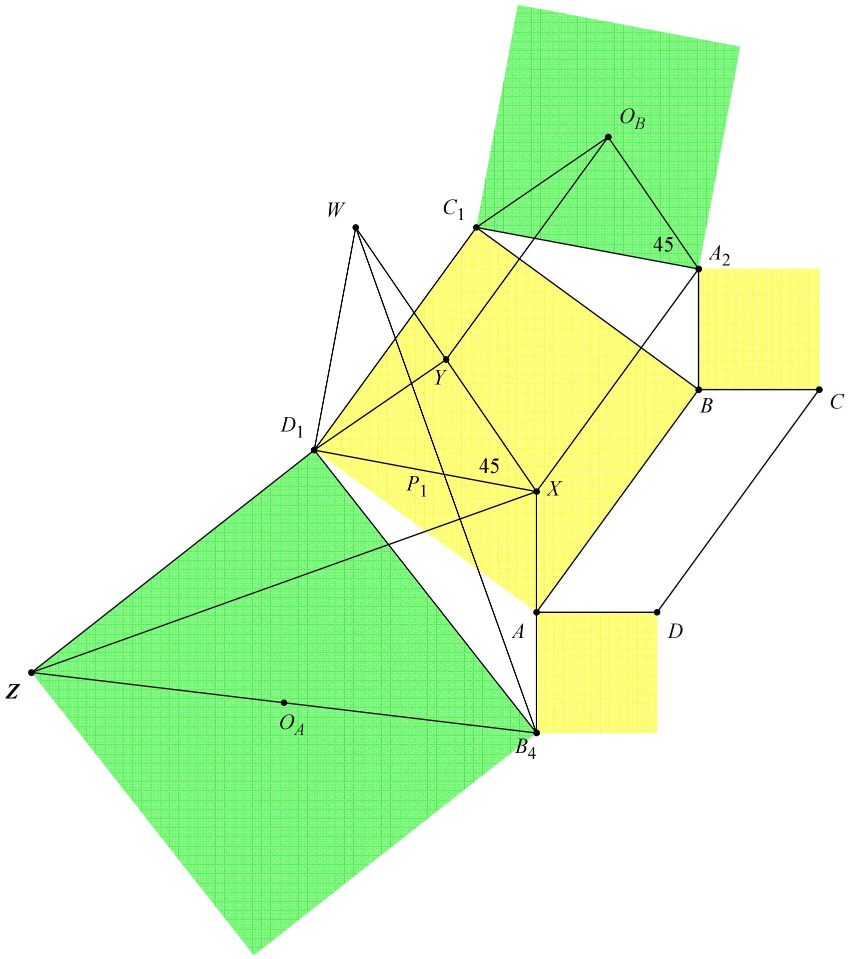
Misalkan persegi-persegi ABC_1D_1, A_2BCD_2, A_3B_3CD, dan AB_4C_4D berturut-turut berpusat di O_1, O_2, O_3, dan O_4. Pertama, tinjau rotasi dengan pusat D_1 dengan sudut $90°$ berlawanan arah dengan jarum jam, kemudian diikuti dengan dilatasi dengan pusat yang sama, yakni D_1, dengan faktor dilatasi $\sqrt{2}$. Transformasi ini akan membawa titik A ke B dan juga membawa titik O_A ke B_4. Jadi, $BB_4 = \sqrt{2}AO_A$. Berikutnya, tinjau rotasi dengan pusat A dengan sudut $90°$ (berlawanan dengan arah jarum jam juga) yang diikuti dengan dilatasi berpusat di A dengan faktor dilatasi $1/\sqrt{2}$. Ini membawa B ke O_1 dan juga B_4 ke O_A. Jadi, $O_1O_4 = BB_4/\sqrt{2} = AO_A$. Dengan cara yang sama, diperoleh juga $BO_B = O_2O_1$.

Cukup dibuktikan bahwa $O_1O_2 = O_1O_4$. Untuk ini, tinjau segitiga O_1AO_4 dan O_1BO_2. Perhatikan bahwa $O_1A = O_1B$ dan $AO_4 = AD/\sqrt{2} = BC/\sqrt{2} = BO_2$,

$$\begin{aligned}
\angle O_1AO_4 &= 90° + \angle D_1AB_4 = 90° + (360° - 90° - 90° - \angle BAD) \\
&= 90° + (180° - \angle BAD) = 90° + \angle ABC = \angle O_1BO_2.
\end{aligned}$$

Jadi, kedua segitiga tersebut kongruen sehingga $O_1O_4 = O_1O_2$ dan bukti kita sudah lengkap.

SOLUSI 2. Seperti solusi sebelumnya, akan dibuktikan bahwa $AO_A = BO_B$. Konstruksi titik X, Y, Z, W sedemikian sehingga ABA_2X dan XA_2O_BY jajar genjang kemudian Y titik tengah XW dan O_4 titik tengah B_4Z.



Dari konstruksi titik X dan Y tersebut, kita mempunyai bahwa segmen-segmen D_1C_1, AB, XA_2, dan YO_B sejajar dan sama panjang. Dari sini kita mempunyai jajar genjang lain, misalnya ABO_BY, yang berakibat $BO_B = AY$, kemudian jajar genjang XA_2O_BY, $XA_2C_1D_1$, dan $YO_BC_1D_1$. Karena $C_1O_BA_2$ segitiga samakaki dan siku-siku di O_B, maka segitiga D_1YX juga samakaki dan siku-siku di Y. Karena Y titik tengah XW, maka XD_1W samakaki dan siku-siku di D_1. Di sisi lain, karena $B_4O_AD_1$ samakaki dan siku-siku di O_A sementara O_A titik tengah B_4Z, maka segitiga B_4D_1Z samakaki dan siku-siku di D_1.

Tinjau rotasi dengan pusat D_1 dengan besar sudut $-90°$ (berarti $90°$ searah jarum jam). Rotasi ini membawa W ke X dan juga membawa B_4 ke Z. Karena rotasi selalu mengawetkan jarak, kita simpulkan $B_4W = XZ$. Sekarang karena $AX \,||\, BA_2$, maka X, A, B_4 segaris. Kita juga mempunyai $AX = BA_2 = BC = AD = AB_4$, yakni A titik tengah B_4X. Jadi,

$$AO_A = \frac{1}{2}XZ = \frac{1}{2}B_4W = AY = BO_B$$

dan kita selesai.

SOLUSI 3. Solusi ini menggunakan bilangan kompleks. Kita gunakan huruf kecil untuk menyatakan bilangan kompleks (atau koordinat di bidang kompleks) dari titik dengan huruf besar. Misalnya, a, b, a_1, b_1, o_a, o_b berturut-turut adalah bilangan kompleks dari titik A, B, A_1, B_1, O_A, O_B

dan seterusnya. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $ABCD$ terurut searah jarum jam. Kita gunakan gambar yang sama seperti SOLUSI 2.

Pertama, karena $ABCD$ jajar genjang, $b-a=c-d$. Karena titik D_1 diperoleh dari titik B dengan melakukan rotasi yang berpusat di A dengan sudut $90°$, maka $d_1=a+i(b-a)$. Sedangkan B_4 diperoleh dari titik D dengan melakukan rotasi yang berpusat di A dengan sudut $270°$ (atau $-90°$), jadi $b_4=a-i(d-a)$. Terakhir, perhatikan bahwa titik O_A diperoleh dari titik D_1 dengan rotasi yang berpusat di *titik tengah* B_4D_1 dengan sudut $90°$, sehingga

$$\begin{aligned}
o_a &= \frac{b_4+d_1}{2}+i\left(d_1-\frac{b_4+d_1}{2}\right)\\
&= \frac{a-i(d-a)+a+i(b-a)-i\,(a-i(d-a)-a-i(b-a))}{2}\\
&= \frac{4a-b-d+i(b-d)}{2}.
\end{aligned}$$

Kita gunakan metode yang sama, $c_1=b-i\,(a-b)$, $a_2=b+i\,(c-b)$ dan

$$\begin{aligned}
o_b &= \frac{c_1+a_2}{2}+i\left(a_2-\frac{c_1+a_2}{2}\right)\\
&= \frac{b+i\,(c-b)+b-i\,(a-b)+i\,(b+i\,(c-b)-b+i\,(a-b))}{2}\\
&= \frac{4b-a-c+i(c-a)}{2}.
\end{aligned}$$

Sekarang, dari $b-a=c-d$, maka $d=c+a-b$, sehingga

$$\begin{aligned}
o_a-a &= \frac{2a-b-(c+a-b)+i(b-(c+a-b))}{2}\\
&= \frac{(2b-a-c)\,i+(a-c)}{2}=i(o_b-b).
\end{aligned}$$

Akibatnya, AO_A dan BO_B sama panjang (dan tegak lurus). Analog, $BO_B=CO_C$ dan $CO_C=DO_D$ dan kesimpulan mengikuti.

SOAL 8. Misalkan A suatu himpunan berhingga beranggotakan bilangan asli. Tinjau himpunan-himpunan bagian dari A dengan tiga anggota. Himpunan A dikatakan *seimbang* apabila banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 *sama dengan* banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3.

(a) Berikan satu contoh himpunan seimbang dengan 9 anggota.

(b) Buktikan bahwa tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota.

SOLUSI. Misalkan $A \subset \mathbb{N}$ memiliki n anggota. Misalkan banyak anggota A yang kongruen $1 \bmod 3$ adalah a, banyak anggota A yang kongruen $2 \bmod 3$ adalah b dan banyak anggota A yang kongruen $0 \bmod 3$ adalah c. Perhatikan juga bahwa jumlah tiga bilangan asli $x+y+z$ habis dibagi 3 jika dan hanya jika $x \equiv y \equiv z \bmod 3$ atau x, y, z ketiganya memiliki sisa berbeda jika dibagi 3. Dengan demikian, banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 adalah

$$\binom{a}{3} + \binom{b}{3} + \binom{c}{3} + abc$$

dan banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3 adalah

$$\binom{a}{2}(b+c) + \binom{b}{2}(c+a) + \binom{c}{2}(a+b).$$

Dengan demikian, diperoleh juga bahwa

$$\binom{n}{3} = \binom{a}{3} + \binom{b}{3} + \binom{c}{3} + abc + \binom{a}{2}(b+c) + \binom{b}{2}(c+a) + \binom{c}{2}(a+b)$$

karena kedua ruas menyatakan banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota. Jadi, himpunan A seimbang jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} &= 2\left\{\binom{a}{2}(b+c) + \binom{b}{2}(c+a) + \binom{c}{2}(a+b)\right\} \\ &= a(a-1)(b+c) + b(b-1)(c+a) + c(c-1)(a+b) \\ &= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c-2)(ab+bc+ca) - 3abc \\ &= (n-2)(ab+bc+ca) - 3abc. \end{aligned} \tag{3}$$

(a) Misalkan A himpunan seimbang dengan 9 anggota. Dengan demikian,

$$\binom{9}{3} = 7(ab+bc+ca) - 3abc.$$

Karena $\binom{9}{3} = 84$ habis dibagi 7, maka 7 juga habis membagi abc. Karena $0 \leq a, b, c \leq 9$, maka salah satu dari a, b, c harus habis dibagi 7. Karena kita hanya mencari satu contoh, kita ambil $a = 7$ dan $b = c = 1$. Kita cek,

$$7(ab+bc+ca) - 3abc = 84 = \binom{9}{3}.$$

memang memenuhi persamaan (3). Dalam hal ini, diperoleh contoh himpunan seimbang $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 2, 3\}$.

(b) Andaikan ada himpunan seimbang A dengan 2013 anggota. Dengan demikian,

$$\binom{2013}{3} = (2013 - 2)(ab + bc + ca) - 3abc = 2011(ab + bc + ca) - 3abc. \tag{4}$$

Karena $\binom{2013}{3} = 2013 \times 2012 \times 2011/6$ habis dibagi 2011 maka $3abc$ juga habis dibagi 2011. Padahal 2011 adalah bilangan prima, tanpa mengurangi keumuman, 2011 membagi a. Karena $0 \leq a \leq 2013$, maka $a = 2011$ atau $a = 0$.

Kasus 1. Untuk $a = 2011$, maka $b + c = 2$ dan dari (4),

$$\frac{2013 \times 2012 \times 2011}{6} = 2011\,(bc + 2011(b + c) - 3bc) = 2 \cdot 2011(2011 - bc)$$

$$2011 - bc = \frac{2013 \times 2012}{12} > 2011$$

yang jelas tidak mungkin.

Kasus 2. Untuk $a = 0$, maka $b + c = 2013$ dan dari (4),

$$\frac{2013 \times 2012 \times 2011}{6} = 2011(0 + bc) - 0 = 2011bc \tag{5}$$

sehingga $bc = 2013 \times 2012/6$ habis dibagi 11 (karena $2013 = 3 \times 11 \times 61$). Tanpa mengurangi keumuman, 11 membagi b. Karena $b + c = 2013$ habis dibagi 11 juga maka c juga habis dibagi 11. Namun jika demikian, maka $2013 \times 2012/6 = bc$ habis dibagi 11^2, suatu kontradiksi (karena faktanya tidak).

Jadi pengandaian kita salah dan kita selesai.